EXERCICE N°1 : 30' 5 points

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace ξ.

On considère les points *A, B* et *C* de coordonnées respectives : $A(1;1;0)$; $B(-1;2;2)$ et $C(-2;1;3)$.

1°) a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire l'aire du triangle *ABC*.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2°) Soit *P* le plan d'équation : $x+z-1=0$ et *Q* le plan d'équation : $x-z-1=0$.

a) Justifier que : $P\perp Q$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de $P\cap Q$.

3°) Soit *S* l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$.

a) Justifier que *S* et une sphère dont on précisera le centre *I* et le rayon *R*.

b) Démontrer que *S* et *P* sont sécants suivant un cercle dont on précisera le centre *H* et le rayon *r*.

4°) Soit α un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$.

On considère les points *E, F* et *N* de l'espace ξ tels que :

$E(2,0,-1)$; $F(0,0,-1)$ et $N\left(1+\cos^2\alpha;\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha;-\cos^2\alpha\right)$.

a) Vérifier que *E* et *F* sont diamétralement apposés sur la sphère *S*.

b) Calculer $\overrightarrow{NE}.\overrightarrow{NF}$. Que peut-on conclure ?

c) Vérifier que $N\in P$.

d) Déduire sur quelle ligne varie *N* lorsque α varie.

5°) a) Montrer que $ON^2=1+4\cos^2\alpha$.

b) Pour quelle (s) valeur (s) de *a* la distance ON^2 est-elle minimale?

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante : $z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i=0$.

1°) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on précisera.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

c) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

2°) Soit θ un réel et (E_θ) l'équation : $z^3-2e^{i\theta}\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4e^{2\theta}\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8ie^{i\theta}=0$.

a) Montrer que $\left(ze^{-i\theta}\right)$ est solution de (E) si et seulement si *z* est solution de (E_θ).

b) Déduire les solutions de l'équation (E_θ).

3°) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les images des solutions des équations (E) et (E_θ), et vérifier qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier.

EXERCICE N°3 :	20'	3 points	

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^4 = 16$.

2°) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): (z-i)^3 = 4(\overline{z}+i)$

a) Vérifier que i est une solution de (E').

b) Montrer que si z est une solution de (E') distincte de i alors $|z-i|^2 = 4$.

c) En déduire que si z est une solution de (E') distincte de i alors $(z-i)$ est une solution de (E).

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

EXERCICE N°4 :	40'	6 points	

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

1°) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Montrer que l' équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 0$.

3°) Donner le signe de g sur $]0,+\infty[$.

B) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = e^{3-x}\ln(x)$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = e^{3-x}\,g(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2°) Vérifier que $\ln(f(\alpha)) = 3-\alpha-\ln\alpha$.

3) On a tracé dans la figure de la page annexe la courbe Γ de la fonction logarithme népérien et on a placé sur l'axe des abscisses le réel α.

a) En utilisant la courbe Γ, placer sur l'axe des ordonnées le réel $\ln\alpha$ puis le réel $3-\alpha-\ln\alpha$.

b) En utilisant encore la courbe Γ,Placer sur l'axe des abscisses puis sur l'axe des ordonnées le réel $f(\alpha)$.

c) Construire, alors, le point $A(\alpha, f(\alpha))$ puis tracer la courbe $\mathcal{C}$.

EXERCICE N°5 :	30'	4 points	

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

1°) a) Montrer que f est dérivable sur IR et dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer les branches infinies à $\mathcal{C}$.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) Soit (v_n) la suite définie sur IN^* par : $v_n=\int_0^n f(x)\,dx$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$ on a : $v_n=2-(2+n)e^{-n}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3°) Pour tout $k\in IN^*$, on pose : $U_k=\int_{k-1}^{k} f(x)dx$.

Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $v_n=\sum_{k=1}^{n}U_k$.

4°) a) Montrer que pour tout $k\in IN^*$; $U_k=(e-1)\,k e^{-k}+(e-2)e^{-k}$.

b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$; on a : $v_n=(e-1)\sum_{k=1}^{n}k e^{-k}+\frac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$

5°) Soit (S_n) la suite définie sur IN^* par : $S_n=\sum_{k=1}^{n}k e^{-k}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n=\frac{e}{(e-1)^2}$.